Unidad III

Aplicaciones de la integral.

3.1 Áreas.

3.1.1 Área bajo la gráfica de una función.

Si f es una funcion que asume valores tanto positivos como negativos sobre [a,b], entonces la integral definida :

$$\int_a^b f(x)dx$$

no representa el area bajo la grafica de f sobre el intervalo.

El valor de:

$$\int_a^b f(x)dx$$

puede interpretarse como el area neta con signo entre la grafica de f y el eje x sobre el intervalo [a,b].

Suponga que la funcion y = f(x) es continua sobre el intervalo [a,b] y que f (x) <0 sobre [a,c) y que f (x) >/ 0 sobre [c,b].

El area total es el area de la region acotada por las graficas de f, el eje x y las rectas verticales x=a y x=b.

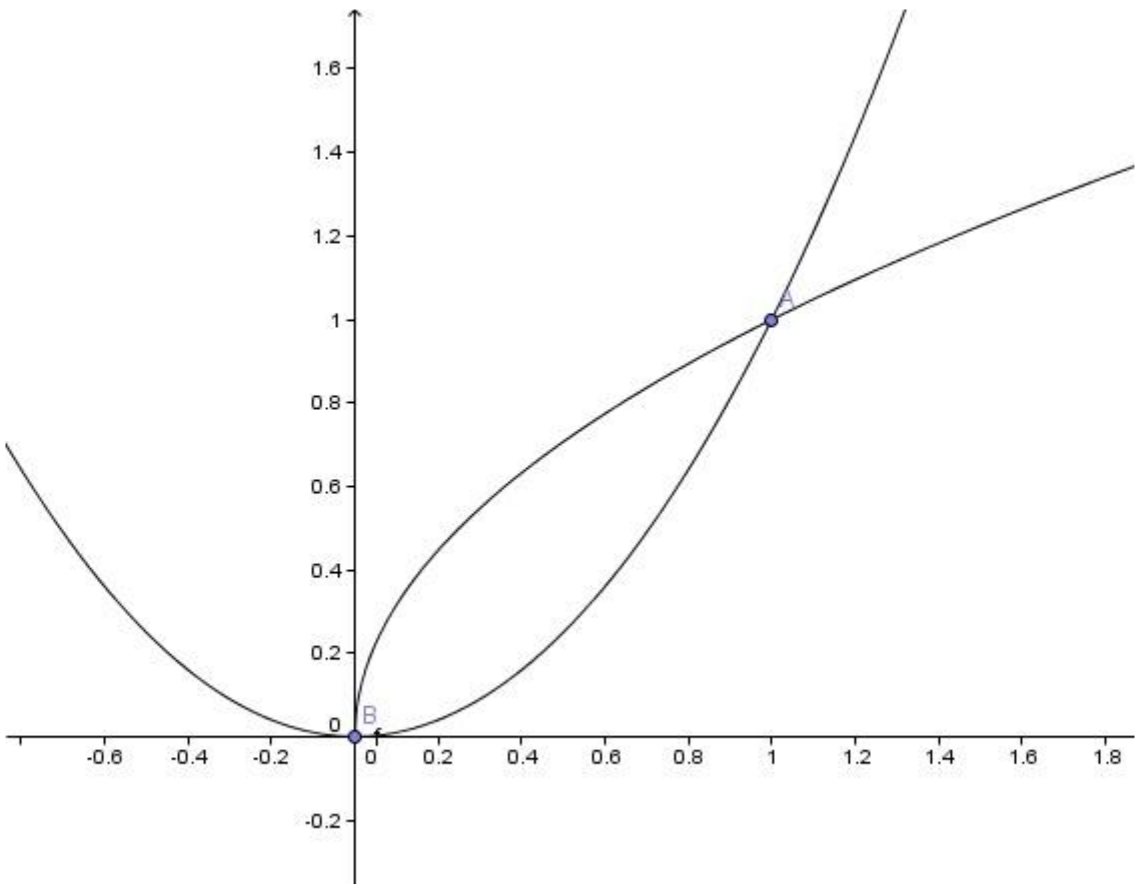
Para encontrar el area se emplea el valor absoluto de la funcion y= | f(x) |, que no es negativa para toda en x en [a,b].

Ejemplo:

Encontrar el área de la región acotada por las graficas de:

$$y = \sqrt{x}$$

$$y = x^2$$



Primeramente se igualan las funciones:

$$\sqrt{x} = x^2$$

$$x = x^4$$

$$x^4 - x = 0$$

$$x(x^3 - 1) = 0$$

$$x = 0 \qquad x^3 - 1 = 0$$

$$x = 1$$

Se toma en cuenta la función de arriba menos la de abajo:

$$\int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)\, dx$$

$$= \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{x^3}{3}$$

$$= \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right) - (0)$$

$$= \frac{1}{3}\, u^2$$

3.1.2 Área entre las gráficas de funciones.

El area bajo la grafica de una funcion continua no negativa y = f(x) sobre un intervalo [a,b] puede interpretarse como el area de la region.

Si f y g son funciones continuas sobre un intervalo [a,b], entonces el are A de la region acotada por sus graficas sobre el intervalo esta dada por:

Ejemplo :

Encontrar el área acotada por las siguientes graficas:

$$y = x^2 - 2x - 3$$

$$y = 2x + 2$$

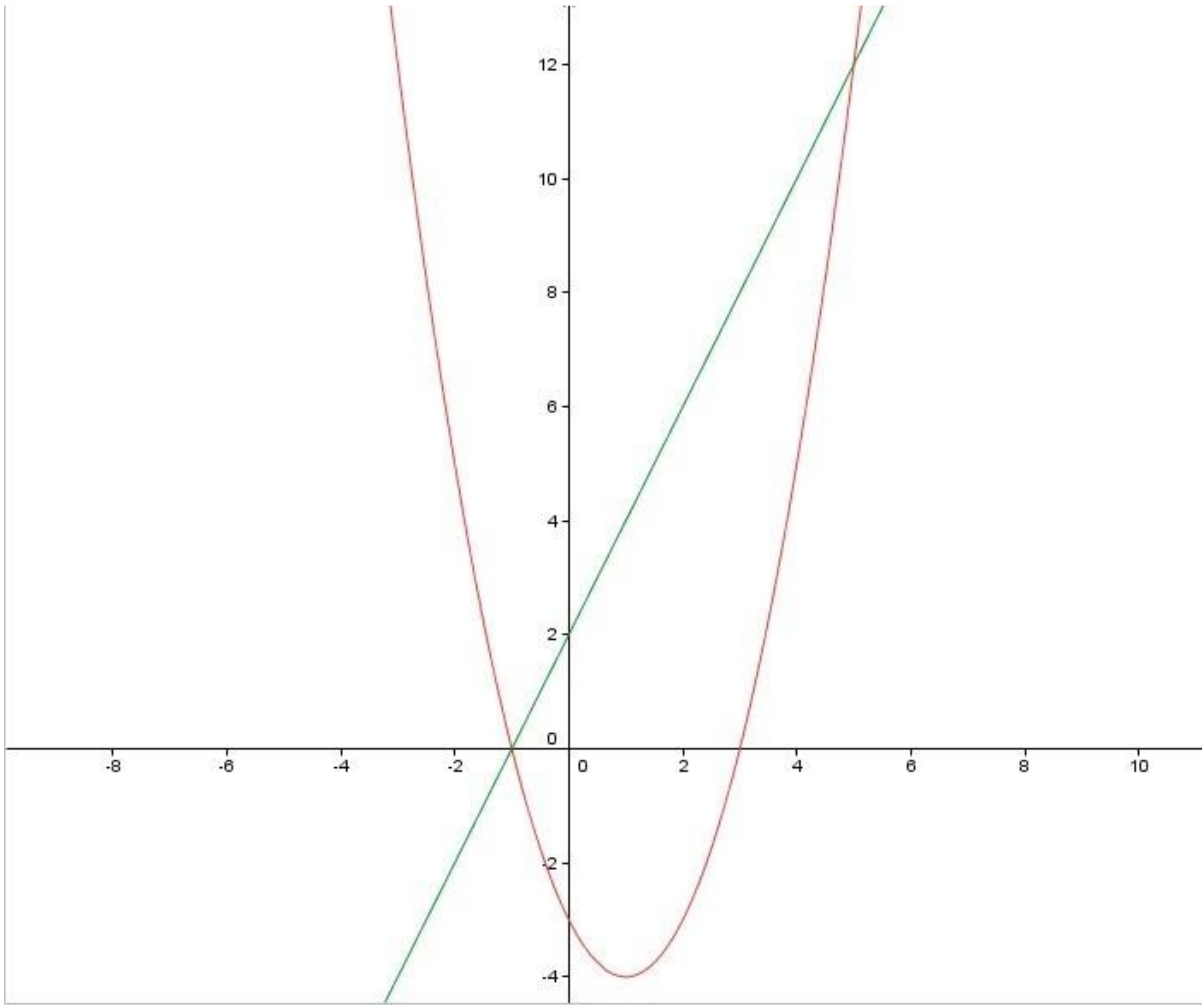
Se igualan las funciones

$$x^2 - 2x - 3 = 2x + 2$$

$$x^2 - 4x - 5 = 0$$

$$x - 5 = 0 \qquad\qquad x + 1 = 0$$

$$x = 5 \qquad\qquad x = -1$$



12
10
8
6
4
2
0
-2
-4
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8
10

$$\int_{-1}^{5}[(2x+2)-(x^2-2x-3)]\,dx \;-\; \int_{5}^{6}[(x^2-2x+3)-(2x+2)]\,dx$$

$$=\left[\left(\frac{2x^2}{2}+2x\right)-\left(\frac{x^3}{3}-\frac{2x^2}{2}-3x\right)\right]dx\ \mathit{evaluado\ de}-1\ a\ 5\ -\ [\left(\frac{x^3}{3}-\frac{2x^2}{2}+3x\right)$$

$$-\left(\frac{2x^2}{2}+2x\right)dx\ \ \mathit{evaluado\ de}\ 5\ a\ 6$$

$$=\left[(1-2)-\left(\frac{125}{3}+25+15\right)\right]-\left[\left(\frac{125}{3}-25+15\right)-(36+12)\right]$$

$$=\frac{-248}{3}-\frac{95}{3}-24=-\frac{343}{3}-\frac{72}{3}=\frac{118}{3}\,u^2$$

3.2 Longitud de curvas.

La longitud de arco de una curva, también llamada rectificación de una curva, es la medida de la distancia o *camino recorrido* a lo largo de una curva o dimensión lineal. Históricamente, ha sido difícil determinar esta longitud en segmentos irregulares; aunque fueron usados varios métodos para curvas específicas, la llegada del calculo trajo consigo la fórmula general para obtener soluciones cerradas para algunos casos.

$$S=\int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$$ Formula General

La longitud de una curva plana se puede aproximar al sumar pequeños segmentos de recta que se ajusten a la curva, esta aproximación será más ajustada entre más segmentos sean y a la vez sean lo más pequeño posible. , escogiendo una familia finita de puntos en C, y aproximar la longitud mediante la longitud de la poligonal que pasa por dichos puntos.Cuantos más puntos escojamos en C, mejor seria el valor obtenido como aproximación de la longitud de C.

(VER IMAGEN 1.0)

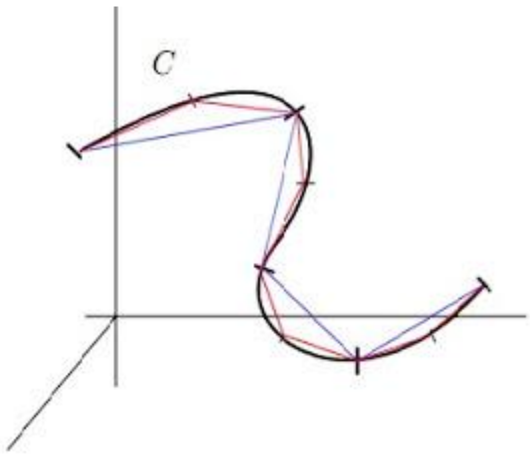


Imagen 1.0

Si la primera derivada de una función es continua en [a,b] se dice que es suave y su gráfica es una curva suave.
(VER IMAGEN 2.0)

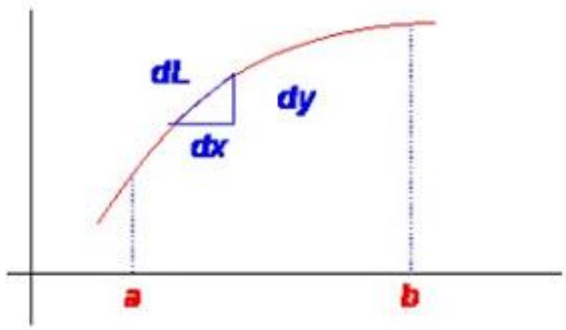


Imagen 2.0

Cuando la curva es suave, la longitud de cada pequeño segmentos de recta se puede calcular mediante el teorema de Pitágoras $(dL)^2=(dx)^2+(dy)^2$.

Si f es suave en [a,b], la longitud de la curva de f(x) desde a hasta b es:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

3.3 Cálculo de volúmenes de sólidos de sólidos de revolución.

MÉTODO DE LAS REBANADAS

Un cilindro recto se define como un solido acotado por dos regiones planas congruentes, en planos paralelos y una superficie lateral que es generada por un segmento de recta perpendicular a ambos planos y cuyos extremos constituyen los limites de las regiones planas.

Su volumen V esta dado por la formula:

v= B * h

donde B se denota el area de una base (el area de las regiones planas) y h denota la altura del cilindro (la distancia perpendicular entre las regiones planas).

Una rebanada es la iterseccion de solido y un plano.

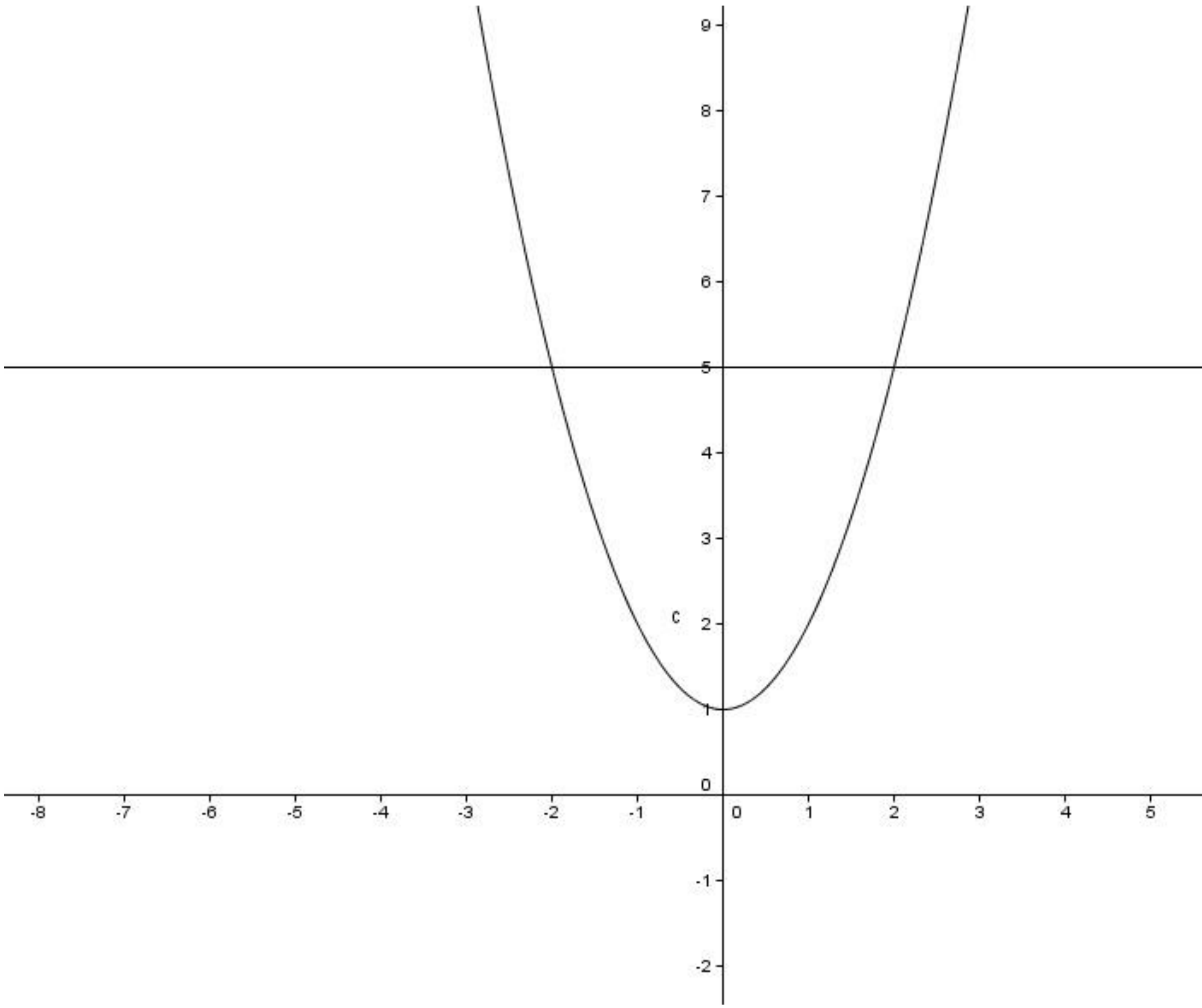
Ejemplo:

$$y = x^2 + 1$$

$$x = 0$$

$$y = 5$$

Gira alrededor del eje Y


c
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-8
-7
-6
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5

$$y = x^2 + 1 = \sqrt{y-1}$$

$$\pi \int_1^5 (\sqrt{y-1})^2 \, dy$$

$$\pi \int_1^5 y - 1 \, dy$$

$$= \pi \left[\frac{y^2}{2} - y\right] \textit{evaluado de } 1 \textit{ a } 5$$

$$= \pi\left[\left(\frac{25}{2} - 5\right) - \left(\frac{1}{2} - 1\right)\right]$$

$$8\pi u^3$$

MÉTODO DE LAS ARANDELAS

Una rebanada perpendicular al eje x del solido de revolucion en xk es una circular o anillo anular.Cuando el elemento rectangular del ancho Axk gira alrededor del eje x, genera una arandela.

El area del anillo es :

a(xk)= area del circulo - area del orificio

$$= \pi[f(x)]^2 - [g(x)]^2$$

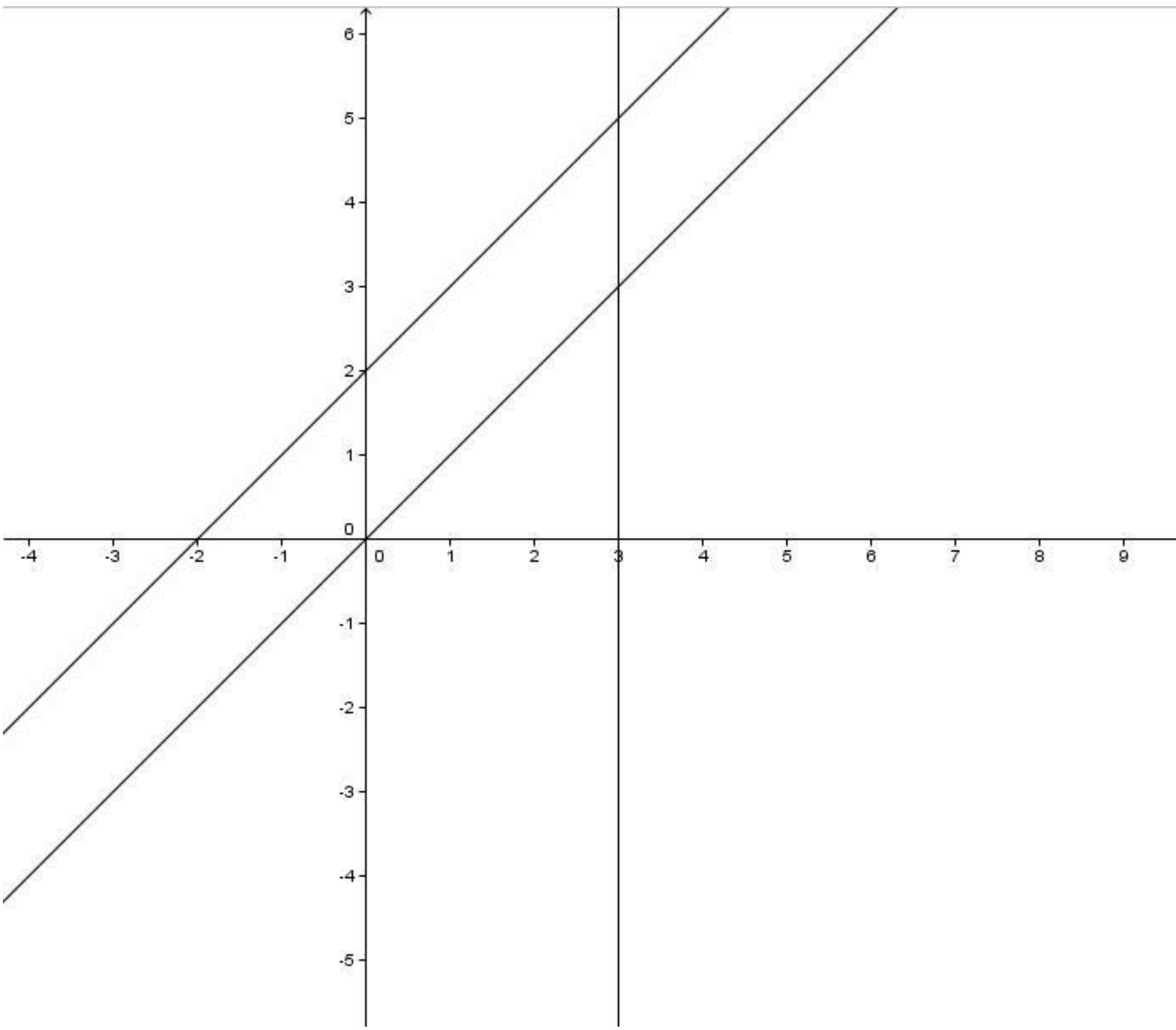
Ejemplo:

$y = x + 2$

$y = x$

X=0

$x = 3$



$$\pi \int_0^3 [(x+2)^2 - x^2]\, dx$$

$$\pi \int_0^3 (4x+4)dx$$

$= 2x^2 + 4x$ dx evaluado de 0 a 3

$$= \pi\, [\,(18+12) - 0] = 30\, \pi\, u^3$$

METODO DE LOS CASCARONES

Se denotan respectivamente los radios interior y exterior del cascaron, y h es su altura, entonces su volumen esta dada por la diferencia.

Volumen del cilindro exterior - volumen del cilindro inferior

$$= \pi\, (r_2 + r_1)(r_2 - r_1)h$$

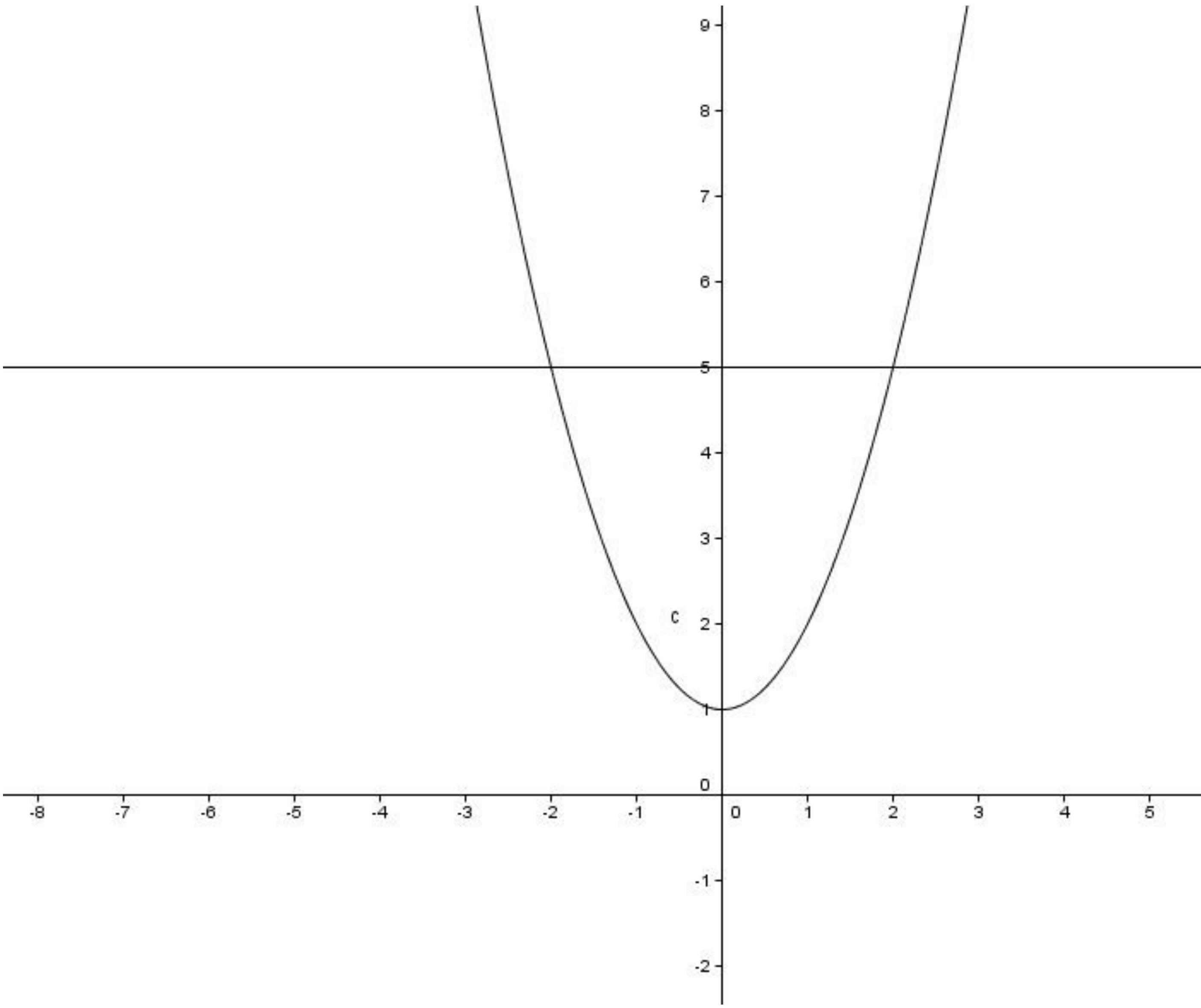
Ejemplo:

Encuentre el volumen del solido que se forma al girar en el eje y

$$x = 0$$

$$y = 3$$

$$y = x^2$$



c
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-8
-7
-6
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5

$$2\pi \int_0^3 y\sqrt{y}\, dy$$

$$2\pi \int_0^3 y^{\frac{3}{2}}\, dy$$

$$= \frac{2\pi\, y^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} = \frac{4}{5}\pi\, y^{\frac{5}{2}}$$

$$= \frac{4}{5}(3)^{\frac{5}{2}} = \frac{4}{5}\pi\sqrt{813} \approx \frac{4}{5}\pi\, 9 * \sqrt{3}$$

3.4 Cálculo de centroides.

Calculo de la Centroides por medio de la integración.

1. Preparar un esquema del cuerpo a escala.

2. Establecer un sistema de coordenadas, en la mayoría de los cuerpos que sean superficies planas, se utilizan coordenadas rectangulares, siempre que el cuerpo presente un eje o un plano de simetría se tomara uno de los ejes, el centroide se encontrara siempre sobre tal eje.

3. Seleccionar un elemento de volumen , superficie o longitud.. para la determinación del centro de masa o centro de gravedad determinar la masa o el peso del elemento utilizando la expresión adecuada de la densidad o del peso especifico.

4. Escribir una expresión del primer momento del elemento respecto a uno de los ejes o planos de referencia. Integrar la expresión para determinar el primer momento.

5. Utilizar la ecuación adecuada para obtener las coordenadas del centroide.

6. Repetir los pasos del 3 al 5 con las coordenadas obtenidas.

Otras integrales

A pesar de que las integrales de Riemann y Lebesgue son las definiciones más importantes de integral, hay unas cuantas más, por ejemplo:

* La integral de Riemann-Stieltjes, una extensión de la integral de Riemann.

* La integral de Lebesgue-Stieltjes, desarrollada por Johann Radon, que generaliza las integrales de Riemann-Stieltjes y de Lebesgue.

* La integral de Daniell, que incluye la integral de Lebesgue y la integral de Lebesgue-Stieltjes sin tener que depender de ninguna medida.

* La integral de Henstock-Kurzweil, definida de forma variada por Arnaud Denjoy, Oskar Perron, y Jaroslav Kurzweil, y desarrollada por Ralph Henstock.

* La integral de Darboux, que es equivalente a la integral de Riemann.

* La integral de Haar, que es la integral de Lebesgue con la medida de Haar.

* La integral de McShane.

* La integral de Buchner

Otras aplicaciones para las integrales.

* Área entre curvas.

* Sólidos de revolución.

* Longitud de curvas.

3.5 Otras aplicaciones.

Aplicaciones de la Integral
Dentro de los problemas típicos que se pueden expresar de manera directa mediante integrales y complementarios al problema básico de “área bajo la curva” se tienen:

- Área entre curvas***.***
- Sólidos de revolución***.***
- Longitud de curvas***.***
- Centroides de figuras planas***.***
- Momentos de Inercia de cuerpos planos***.***

El objetivo de la presente sección es estudiar cada una de esas diferentes aplicaciones y se comenzará con la aplicación más común y que a su vez motivó los conceptos básicos de la integral: el área bajo la curva.

Área entre la curva y el eje x

En efecto, ya lo hemos señalado, integral no es lo mismo que área, ya que el concepto de integral es realmente un concepto mucho más amplio y que se puede aplicar a infinidad de situaciones novedosas. Por otro lado, realizando las correcciones necesarias respecto de los valores negativos que pueda tomar una función en un intervalo la integral calcula perfectamente el área entre el eje x y una curva dada.

Pero el concepto de área se puede ampliar a espacios delimitados entre diversas curvas en el plano, estudiemos ahora esa generalización.

Área entre curvas

La integral representa la acumulación de las pequeñas variaciones en una situación dada, por ello podemos responder a la pregunta: Si se tiene una curva ¿Cuánto mide? ¿Cómo la mido? ¿Qué son las pequeñas variaciones en ese caso?

Longitud de una curva

La integral como concepto nace alrededor del cálculo numérico, por lo que muchas de las integrales que se nos presentan en la vida cotidiana ni tan siquiera son planteadas analíticamente; sin embargo, eso no las hace inútiles; ¡por el contrario! El potencial analítico de la integral se logra ante la simplicidad del concepto ¡no deja de ser una suma!!!!!

Pero ahora con las computadoras, esas sumas las podemos hacer de manera muy eficiente.

Integración numérica

Es verdad que la motivación del la integración lo fue el concepto geométrico de área, pero ya hemos concluido que en realidad la podemos emplear en cualquier situación que se pueda representar por el producto de dos cantidades y el volumen es uno de esos casos, veamos los siguientes cuerpos geométricos y como la integral nos auxilia a calcular volúmenes.

Superficies y sólidos de Revolución

En los cuerpos físicos ocurren muchos fenómenos asociados a su geometría, dentro de esos fenómenos se presenta la ocurrencia de la masa, el peso y por tanto los efectos de la atracción gravitatoria, observemos ahora dos conceptos físicos necesarios para el estudio de cantidades físicas como las mencionadas.

Momentos de Inercia

Las aplicaciones de la integral son muy amplias y en este apartado se han presentado algunas de las más comunes, y con este estudio se amplia el panorama para que en nuestra visión de la naturaleza, en los actos que nos rodean todos los días, observemos como la acumulación es un hecho cotidiano.